

EXERCICES

ALGÈBRE 4 – ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

EXEMPLES DE PRODUIT SCALAIRE

- Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 2xx' + 2yy' + x'y + xy'$
 - φ est-elle une forme bilinéaire symétrique? φ est-elle un produit scalaire?
 - Mêmes questions avec $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 4xx' - 3yy' + 2x'y + 2xy'$
 - Mêmes questions avec $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 4xx' + yy' - 2x'y - 2xy'$
- Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto X^T A Y \end{cases}$
 - Montrer que φ est bilinéaire.
 - À quelle condition nécessaire et suffisante, φ est-elle symétrique?
 - Exprimer $\varphi(X, Y)$ en fonction des composantes de X et de Y .
 - À quelle condition nécessaire et suffisante, φ est-elle un produit scalaire?
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, vérifier que les applications suivantes sont des produits scalaires :
 - $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$.
 - $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.
 - $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.
- On note $\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge} \right\}$.
Soit $\varphi : \begin{cases} (\ell^2(\mathbb{R}))^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \end{cases}$
 - Montrer que φ est bien définie sur $(\ell^2(\mathbb{R}))^2$.
 - Montrer que φ est un produit scalaire.
- Soient E le $\mathbb{R}$ -ev des suites réelles et F la partie de E formée des suites réelles bornées.
 - F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
 - Montrer que $\langle u | v \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k v_k}{2^k}$ définit un produit scalaire sur F .
 - Recommencer sans rien oublier.

SOUS-ESPACES ORTHOGONAUX

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, montrer que $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ et $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que $A = B$.
- Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.
 - Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
 - On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles formés des fonctions paires et impaires de E . Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux.
- Dans $E = \ell^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini à l'exercice 4, soit G le sous-espace de $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites nulles à partir d'un certain rang.
 - Montrer que $G^\perp = \{0_E\}$.
 - A-t-on $E = G \oplus G^\perp$?
- Soient E un espace préhilbertien réel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - Montrer que $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$.
 - Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
L'inclusion peut être stricte comme va le prouver la suite.
 - On considère ici $E = \mathcal{C}^0([-1, 1])$ muni du produit scalaire défini par $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$
Soient F et G les sous-espaces vectoriels des fonctions de E nulles sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ respectivement. Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$ puis $F^\perp + G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp$.
Conclure.

ORTHOGONALITÉ

- Soit E un espace préhilbertien réel. $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs de E tels que $\forall i = 1, \dots, n, \|e_i\| = 1$ et $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2$
Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale de E puis que c'est une base orthonormée de E .
- Soient E un espace préhilbertien réel et $f, g : E \rightarrow E$ deux applications vérifiant $\forall x, y \in E, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | g(y) \rangle$
Montrer que f et g sont linéaires.

13. Soient E un espace préhilbertien réel et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$$

Montrer que f est linéaire.

14. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = \int_0^1 A(t)P(t) dt$$

Que dire du degré de A ?

Le résultat persiste-t-il si on remplace $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$?

INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

15. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2$.

Étudier les cas d'égalité.

16. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\text{tr}(A \cdot A)}$.

Préciser les cas d'égalité.

17. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad (\text{tr}(AB + BA))^2 \leq 4 \text{tr}(A^2) \cdot \text{tr}(B^2)$ et préciser les cas d'égalité.

PROCÉDÉ D'ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT

18. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

a) Déterminer une base orthonormée de F .

b) Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

19. On reprend le produit scalaire de l'exercice **3a** avec $n = 2$. Trouver une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) telle que $\forall i \in [0, 2], \deg P_i = i$.

20. Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini à l'exercice **3c**, déterminer la base orthonormée obtenue par le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT à partir de la base canonique.

21. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer une base orthonormée de l'hyperplan d'équation

$$x_1 + \dots + x_n = 0.$$

22. $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire défini à l'exercice **3b**.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\deg P_k = k$.

b) Expliciter $P_0, \dots, P_n$ lorsque $a_0 = \dots = a_n = a$.

Réfléchissez bien avant de calculer...

PROJECTIONS ET SYMÉTRIES ORTHOGONALES

23. Dans E euclidien de dimension 4 rapporté à une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on note

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \text{ et } \vec{v} = 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4$$

Écrire la matrice de la projection orthogonale de E sur le sous-espace $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

24. Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, on considère le sous-espace F d'équation : $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$

a) Déterminer une base orthonormée de F .

b) Exprimer la projection orthogonale puis la symétrie orthogonale par rapport à F .

25. Soit p un projecteur de E .

a) Montrer que p est un projecteur orthogonal $\iff \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

b) Montrer que p est un projecteur orthogonal $\iff \forall x, y \in E, \langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$

DISTANCE À UN SOUS-ESPACE, MINIMISATION

26. Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, soit P le plan d'équation : $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ et $u = (a, b, c, d)$ un vecteur non nul.

Calculer la distance de u au plan P .

27. Dans $\mathbb{R}_3[X]$ euclidien canonique $(\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^3 a_k b_k)$, soit $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$.

Calculer la projection orthogonale de X sur H , puis la distance de X à H .

28. Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, soit $H : \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$ un hyperplan.

Montrer que la distance du vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ à H est : $d(x, H) = \frac{\left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}}$

29. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle A \mid B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$.

a) Montrer que les matrices élémentaires forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Calculer la distance de la matrice J uniquement composée de 1 (matrice d'ATTILA) à l'ensemble des matrices diagonales.

c) Calculer la distance d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

30. On définit l'application $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt \end{matrix}$

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

c) Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^2 - at - b)^2 dt$.

31. Montrer qu'il existe un unique triplet (a, b, c) de réels minimisant $\int_{-1}^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.
On déterminera ce triplet ainsi que la valeur du minimum.

32. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (t - a \sin t - b \cos t)^2 dt$.

33. Montrer que $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (at^3 + bt^2 + ct + 1)^2 e^{-t} dt = \frac{1}{4}$.

34. Montrer que $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 x^2 (\ln x - ax - b)^2 dx = \frac{1}{432}$.

35. Déterminant de GRAM

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E , on note $G(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est $\langle u_i | u_j \rangle$.

a) Que dire de $G(u_1, \dots, u_p)$ si $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale? orthonormée?

b) Montrer que si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée alors $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$

c) Prouver la réciproque.

d) Soient F un sev de E et $(e_1, \dots, e_p)$ une base (quelconque) de F .

Montrer que, pour tout $x \in E$,
$$d^2(x, F) = \frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}$$

(Décomposer x selon $F \oplus F^\perp$.)

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

36. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose si $A, B \in E$:

$$\varphi(A, B) = \int_{-1}^1 \frac{A(t)B(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

a) Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.

b) Si p et q sont des entiers, calculer $\int_0^\pi \cos(pt) \cos(qt) dt$.

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , il existe un unique polynôme T_n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos \theta).$$

d) Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

e) En déduire une base orthonormée de E .

37. Racines de polynômes orthogonaux.

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, ω une application continue sur $I =]a, b[$, positive, ne s'annulant qu'un nombre fini de fois et telle que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $t \mapsto P(t)\omega(t)$ soit intégrable sur I .

a) Si $I = \mathbb{R}$, donner un exemple d'une telle application ω .

b) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\forall A, B \in \mathbb{R}[X], \quad \langle A | B \rangle = \int_I A(t)B(t)\omega(t) dt$$

c) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de la base canonique de E .

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, e_n est de degré n .

Soit $n \geq 1$. En considérant $(e_n | e_0)$, montrer d'abord que e_n a au moins une racine sur I puis que e_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples qui sont toutes dans I .

Indication : Poser $P = \prod_{k=1}^p (X - \rho_k)$ si les ρ_k sont les racines d'ordre impair de e_n qui sont dans I puis regarder $(P \times e_n)$ pour conclure que $p = n$.

CONCOURS

38. CCINP

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.

39. CCINP

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.

40. CCINP

Sur $\mathbb{R}_n[X]$ on définit l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

a) Montrer que c'est un produit scalaire.

b) Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa dimension.

c) Calculer $d(1, E)$.

41. CCINP

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt$.

42. CCINP

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, on pose

$$\varphi(A, B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la distance $d(A, H)$.

43. CCINP

a) Montrer que l'application $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.

b) Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Trouver une base de $E^\perp$.

d) Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $E^\perp$.

44. IMT

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$. Soient $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_n)$ deux familles de vecteurs de E telles que : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (x_i | x_j) = (y_i | y_j)$.

a) Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathcal{G}$ est libre.

b) Montrer que $\dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{G})$.

45. CCINP

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Soit $f \in \text{GL}(E)$ un automorphisme tel que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.

a) Que dire de la famille $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$?

b) En calculant $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle$ de deux façons, montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\|f(e_i)\|^2 = a^2$ pour tout i . Que dire de la famille $\frac{1}{a}\mathcal{B}'$?

46. IMT

Soit E un espace préhilbertien réel. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge faiblement vers $x \in E$ si : $\forall y \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$.

a) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$.

b) Montrer que cette équivalence est fautive en dimension infinie.

47. Centrale

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

a)(i) Si la norme N est euclidienne, montrer qu'on a l'identité du parallélogramme : $\forall x, y \in E, N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2$.

(ii) Donner une expression du produit scalaire en fonction de N .

(iii) La norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifie-t-elle l'identité du parallélogramme ?

b) On suppose que la norme N sur E vérifie l'identité du parallélogramme. On pose $f(x, y) = N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2$ pour tous $x, y \in E$.

(i) Soient $x, x', y \in E$. Montrer que $f(x+x', y) = 2f(x, y/2) + 2f(x', y/2)$.

(ii) En déduire que $f(x+x', y) = f(x, y) + f(x', y)$.

(iii) Montrer que pour tous $x, y \in E$ et $t \in \mathbb{R}, f(tx, y) = tf(x, y)$.

(iv) Conclure que f est un produit scalaire et que la norme N est euclidienne.

48. Mines Ponts

On munit l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$. Soit $F = \{P \in E, \langle X^2 - 1, P \rangle = \langle X, P \rangle\}$ et $Q = 1 + X + X^2 + X^3$. Déterminer $d(Q, F)$.

49. Mines Ponts

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ et $\Phi : (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_k pour que Φ soit un produit scalaire.

b) Calculer la distance de X^n à $F = \left\{ P \in \mathbb{R}^n[X], \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$.

50. Mines Ponts

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E , montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists ! (f_j)_{1 \leq j \leq n} \in E^n, M = (\langle e_i, f_j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.

b) Étudier la réciproque.

51. Mines Ponts

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Soient $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux. Exprimer la projection orthogonale sur W des éléments de E .

c) On note $E_{\alpha, \beta} = \{f \in E, f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$. Calculer $\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \int_0^1 (f^2 + (f')^2)$.

52. Mines Ponts

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E . Démontrer l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit orthogonale.

53. Mines Ponts

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E . Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si $\forall x \in E, \|x\|^2 = d(x, F)^2 + d(x, G)^2$.

54. Mines Ponts

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de fonctions continues et de carré intégrable sur I . On pose pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = \int_I f_i(t)f_j(t) dt$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto {}^tXAY$ où A est la matrice de terme général $a_{i,j}$.

Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.